数理解析研究所講究録 1415 巻 2005 年 56-63

RIESZ 空間値測度の BOREL 直積

信州大学・工学部 河邊 淳* (Jun Kawabe)
天野 雄介 (Yusuke Amano)
Faculty of Engineering, Shinshu University

概要. この論文では，完全正則空間上で定義され，Dedekind 完備 Riesz 空間に値をとる σ-測度の Borel 直積の存在性と一意性に関する定理が関連する諸結果とともに紹介されている.

1. 序論

X は Hausdorff 空間，V は Dedekind 完備 Riesz 空間とする．X の Borel 集合から成る σ-集合体を $\mathcal{B}(X)$ で表す．有限加法的な集合関数 $\mu:\mathcal{B}(X)\to V$ は，互いに素な集合から成る任意の列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}(X)$ に対して $\mu(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)$ を満たすとき，X 上の V-値 σ-測度と呼ばれる．上に有界な任意の単調増加列がその上限に収束する Hausudorff 線形位相が V 上に存在する場合には，V-値 σ-測度は位相的に定義された可算加法性をもつ通常のベクトル測度と一致し，その性質についてはかなりよく研究されている (Diestel and Uhl [3], Dinculeanu [4], and Kluvánek and Knowles [10] などを見よ)．しかし，このような性質をもつ Hausdorff 線形位相が一つもない Riesz 空間が存在する (Floyd [5]).

位相空間上の測度論において Borel 直積測度は重要な役割を果たす．Wright [15, Theorem 1.7] は，局所コンパクト空間上で定義され，単調完備な順序線形空間に値をとる 2 つの σ-測度の Borel 直積の定式化を行い，その存在と一意性を保証する条件を与えた.

この論文の目的は，Borel 直積測度の存在と一意性に関する Wright の結果が完全正則空間上で定義された σ-測度へ拡張可能であることを紹介することにある．拡張に際してのポイントは，我々の目的に沿った形の Riesz の表現定理，すなわち，完全正則空間 X 上の実数値有界連続関数全体から成る Riesz 空間 $C(X)$ から Dedekind 完備 Riesz 空間 V への正値線形作用素 $T:C(X)\to V$ が与えられたとき，T が X 上

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 28B15; Secondary 28C15, 46G10.
Key words and phrases. Dedekind complete Riesz space, σ-measure, tightness condition, complete properness, Borel product measure.
*Research supported by Grant-in-Aid for General Scientific Research No. 15540162, Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, Japan.

の V-値 σ-測度で積分表示できるために作用素 T に課すべき必要十分条件を見出すことである.

第2章では, Riesz 空間や Riesz 空間値測度に関する基本的な結果をまとめる. 上で述べた結果は第3章と第4章で与えられる.

この論文の中の幾つかの結果は, コンパクト空間上の測度の場合には, Wright [12, 13, 14, 15] の結果の特別な場合となっている. しかし, それらの結果をコンパクト空間からより一般の空間に拡張することは, 測度の弱収束の理論を展開する際には必要不可欠である. なぜなら, 測度の弱収束の理論を無限次元空間上の測度に応用するには, コンパクト性や局所コンパクト性の壁を越えて, 距離空間やさらに一般に完全正則空間上での理論展開が必要となるからである (例えば, Boccuto and Sambucini [2] あるいは [6, 7, 8, 9] を見よ).

2. 記号と準備

この論文で扱う位相空間はすべて Hausdorff の分離公理を満たしているとする. 実数全体を $\mathbb{R}$ で, 自然数全体を $\mathbb{N}$ で表す. この章では, Riesz 空間に関する基本的な事実を復習したあとで, Riesz 空間値測度の正則性の定義及び準備的な結果をまとめる.

2.1. Riesz 空間. 上に有界な空でない任意の集合が上限をもつ Riesz 空間は **Dedekind 完備**であるという. Dedekind 完備な Riesz 空間はすべて Archimedean である (Zaanen [16, Theorem 12.3]).

Riesz 空間 V に対して, $V^+ := \{u \in V : u \geq 0\}$ とおく. 有向点列 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset V$ と $u \in V$ が与えられたとき, $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ が単調減少で $\inf_{\alpha\in\Gamma} u_\alpha = u$ ならば, u_α は u に**単調減少収束する**といい, $u_\alpha \downarrow u$ とかく. 単調増加収束 $u_\alpha \uparrow u$ も同様に定義する. 有向点列 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ が u に**順序収束する**とは, 0 に単調減少収束する有向点列 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ が存在して, 任意の $\alpha \in \Gamma$ に対して $|u - u_\alpha| \leq p_\alpha$ が成り立つことである. このとき, $u_\alpha \xrightarrow{o} u$ または $\lim_{\alpha\in\Gamma} u_\alpha = u$ とかく.

点列の順序収束のもつ性質は [16, Lemma 10.1, Theorem 10.2] で与えられているが, これと同様な性質は有向点列に対しても適当な修正を行えば成立する. 詳しくは [7, Proposition 1] を見よ. また, Riesz 空間に関するより詳細な情報については, Aliprantis and Burkinshaw [1], Luxemburg and Zaanen [11] を見よ.

2.2. σ-測度. X を位相空間とする. X の Borel 集合から成る σ-集合体を $\mathcal{B}(X)$ で表す. すなわち, $\mathcal{B}(X)$ は X の開部分集合全体から生成された σ-集合体である. X 上の実数値有界連続関数から成る Banach 束を $C(X)$ で表し, そのノルムを $\|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)|$ とかく.

V は Dedekind 完備 Riesz 空間とする．有限加法的な正値集合関数 $\mu : \mathcal{B}(X) \to V$ は，$\mathcal{B}(X)$ の互いに素な集合から成る任意の列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ を満たすとき，X 上の **V-値 σ-測度**という．この論文では，正値測度だけを対象としていることを注意しておく．スカラー値測度の場合と同様に，任意の σ-測度は単調列的連続性をもつ，すなわち，$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(X)$ が単調増加列ならば $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$，単調減少列ならば $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ が成り立つ．

Riesz 空間値 σ-測度に関する実数値可測関数の積分概念は，Wright [12, 14] で与えられ，そこで定義された積分に関して，単調収束定理，Fatou の補題，優収束定理などが成り立つことが示されている．

2.3. σ-測度の正則性. 位相空間上の測度の理論を展開するには，スカラー値測度の場合と同様に，Riesz 空間値測度に対して，測度が定義された空間の位相に関する測度の "滑らかさ" を表す正則性の概念を導入する必要がある．以下では，X は位相空間，V は Dedekind 完備 Riesz 空間とする．

定義 2.1. μ は X 上の V-値 σ-測度とする．

(i) μ が**擬正則**であるとは，任意の開集合 $G \subset X$ に対して

$$\mu(G) = \sup \{\mu(F) : F \subset G,\ F \text{ は閉集合}\}$$

が成り立つことである．

(ii) μ が**擬ラドン**であるとは，任意の開集合 $G \subset X$ に対して

$$\mu(G) = \sup \{\mu(K) : K \subset G,\ K \text{ はコンパクト集合}\}$$

が成り立つことであり，特に上の条件が $G = X$ に対してだけ成り立つとき，μ は**緊密**であるという．

(iii) μ が **τ-正則**であるとは，X の開部分集合から成る任意の単調増加有向集合列 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ に対して，$G = \cup_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha$ とおくと，$\mu(G) = \sup_{\alpha\in\Gamma} \mu(G_\alpha)$ が成り立つことである．

注意 2.2. 正則な σ-測度やラドン σ-測度の概念はスカラー値測度の場合と同様に定義される．しかし，これらの概念はこの論文では必要としないので，その定義の記述は省略する．

上で定義した擬正則性，擬ラドン性，緊密性，τ-正則性の概念の相互関係は以下の通りである．

補題 2.3 ([8]). μ は X 上の V-値 σ-測度とする．このとき，次の 2 つの条件は同値.

(i) μ は緊密かつ擬正則.

(ii) μ は擬ラドン.

補題 2.4 ([8]). X 上の擬ラドン V-値 σ-測度はすべて τ-正則である.

$\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像全体を Θ で表す. Dedekind 完備 Riesz 空間 V は, 任意の $i, j \in \mathbb{N}$ に対して $q_{i,j} \geq q_{i,j+1}$ であり, さらに任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $\inf_{j\in\mathbb{N}} q_{i,j} = 0$ となる順序有界な 2 重点列 $\{q_{i,j}\} \subset V$ に対して, $\inf_{\theta\in\Theta} \sup_{i\in\mathbb{N}} q_{i,\theta(i)} = 0$ が成り立つとき, **弱 σ-分配的**であるという. Dedekind 完備 Riesz 空間 V が弱 σ-分配的であれば, 完備可分距離空間上のすべての V-値 σ-測度は擬ラドンとなる ([9]).

3. Riesz 型の表現定理

X は位相空間, V は Dedekind 完備 Riesz 空間とする. X 上で定義された有界な実数値 Borel 可測関数全体から成る Banach 束を $B(X)$ で表し, その束ノルムを $\|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)|$ とかく. 有界連続関数空間 $C(X)$ から V への正値線形写像に対する Riesz 型の表現定理が成立するための必要十分条件として我々が見出した条件が, 以下の緊密性の条件である.

定義 3.1 ([8]). X は位相空間, V は Riesz 空間とする. 正値線形写像 $T : C(X) \to V$ が**緊密性の条件を満たす**とは, 0 に単調減少収束する有向点列 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset V$ と X のコンパクト集合から成る有向集合列 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ が存在して, すべての $\alpha \in \Gamma$ と, $0 \leq f \leq 1$ 及び $f(K_\alpha) = \{0\}$ を満たすすべての関数 $f \in C(X)$ に対して, $T(f) \leq p_\alpha$ が成り立つことである.

以上の準備の下で, Dedekind 完備 Riesz 空間に値をとる正値線形写像に対して Riesz 型の表現定理を与えることができる.

定理 3.2 ([8]). X は完全正則空間, V は Dedekind 完備 Riesz 空間で, $T : C(X) \to V$ は正値線形写像とする. このとき, 次の 2 つの条件は同値.

(i) T は緊密性の条件を満たす.

(ii) X 上の擬ラドン V-値 σ-測度 μ が存在して, すべての $f \in C(X)$ に対して

$$T(f) = \int_X f d\mu \tag{1}$$

が成り立つ.

さらに, この μ は(1) 式と擬ラドン性により一意的に定まる.

上の定理で仮定した緊密性の条件は, X がコンパクトの場合は自動的に満たされる. それゆえ, 定理 3.2 から [12, Theorem 4.1] や [14, Theorem 4.5] の特別な場合が導かれる ([13, Theorem 1] も見よ).

X と Y は位相空間とする．$B(X)$ で X 上で定義された有界な実数値 Borel 可測関数全体から成る Banach 束を表し，その束ノルムを $\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$ とかく．$B(Y)$ や $B(X \times Y)$ の定義も同様である．

この章を通じて，U，V，W は Dedekind 完備 Riesz 空間で，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $U \times W$ から V への双線形写像で，さらに**双正値**，すなわち，任意の $u \in U^+$ と $w \in W^+$ に対して，$\langle u, w \rangle \in V^+$ であるとする．さらに，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は**完全に適正**，すなわち，次の2つの条件を満たすと仮定する:

(i) 上に有界な単調増加有向点列 $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma} \subset U$ と $w \in W^+$ に対して，関係式 $\sup_{\alpha \in \Gamma} \langle u_\alpha, w \rangle = \langle \sup_{\alpha \in \Gamma} u_\alpha, w \rangle$ が成り立つ．

(ii) 上に有界な単調増加有向点列 $\{w_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma} \subset W$ と $u \in U^+$ に対して，関係式 $\sup_{\alpha \in \Gamma} \langle u, w_\alpha \rangle = \langle u, \sup_{\alpha \in \Gamma} w_\alpha \rangle$ が成り立つ．

以下で Dedekind 完備 Riesz 空間上で定義された完全に適正な双正値双線形写像の例をあげる．詳細は [15] を見よ．

例 4.1. (1) 空でない任意の集合 I 上で定義された実数値関数全体から成る Dedekind 完備 Riesz 空間を $F(I)$ で表す．このとき，各 $f, g \in F(I)$ に対して $\langle f, g \rangle := fg$ で定義された写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : F(I) \times F(I) \to F(I)$ は完全に適正．

(2) 以下では，$(\Omega, \mathcal{A}, m)$ は σ-有限な測度空間とする．$(\Omega, \mathcal{A}, m)$ 上で定義された m-可測な実数値関数全体から成る Dedekind 完備 Riesz 空間を $L^0(\Omega)$ で表す．また，$L^p(\Omega)$ $(1 \le p \le \infty)$ は通常の Lebesgue 可積分関数空間とする．$L^p(\Omega)$ はすべて $L^0(\Omega)$ の順序イデアルなので，それ自身，Dedekind 完備である．さらに，$1 \le p < \infty$ の場合は，$L^p(\Omega)$ は順序連続なノルムをもつ Banach 束である．一方，$L^\infty(\Omega)$ は順序連続なノルムをもたない Banach 束の例となっている．このとき，次の写像はすべて完全に適正である．

- 各 $f, g \in L^0(\Omega)$ に対して $\langle f, g \rangle := fg$ で定義された写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^0(\Omega) \times L^0(\Omega) \to L^0(\Omega)$.
- $1 \le p \le \infty$ かつ $1/p + 1/q = 1$ とする．各 $f \in L^p(\Omega)$ と $g \in L^q(\Omega)$ に対して $\langle f, g \rangle := fg$ で定義された写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \to L^1(\Omega)$．また，各 $f \in L^p(\Omega)$ と $g \in L^q(\Omega)$ に対して $\langle f, g \rangle := \int_\Omega fg dm$ で定義された写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \to \mathbb{R}$.
- 各 $f, g \in L^\infty(\Omega)$ に対して $\langle f, g \rangle := fg$ で定義された写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$.
- $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ は有限測度空間とする．各 $f, g \in L^\infty(\Omega)$ に対して，$\langle f, g \rangle := \int_\Omega fg dm$ で定義された写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$.

(3) $\mathbb{R}^n$ 上で定義された Lebesgue 可積分な実数値関数全体から成る Riesz 空間を $L^1(\mathbb{R}^n)$ とする．各 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して写像 $\langle\cdot,\cdot\rangle : L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ を $\langle f, g\rangle := f * g$ と定義すると，完全に適正．ただし，$f * g$ は f と g の合成積を表す．

(4) (1)–(3) と同様の結果が実数列全体から成る空間 (s) や p-総和可能な実数列から成る空間 ℓ^p $(1 \le p \le \infty)$ に対しても成り立つ．

(5) L，M，N は Riesz 空間で，M と N は Dedekind 完備とする．M から N への順序連続な順序有界線形作用素全体から成る Dedekind 完備 Riesz 空間を $\mathcal{L}_n(M, N)$ で表す．$\mathcal{L}_n(L, M)$ や $\mathcal{L}_n(L, N)$ の定義も同様．このとき，各 $P \in \mathcal{L}_n(M, N)$，$Q \in \mathcal{L}_n(L, M)$ に対して $\langle P, Q\rangle := PQ$ で定義される写像 $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{L}_n(M, N) \times \mathcal{L}_n(L, M) \to \mathcal{L}_n(L, N)$ は完全に適正．

Wright の論文 [15, Theorem 1.7] では，X と Y が局所コンパクト空間の場合に，2 つの擬ラドン σ-測度 $\mu : \mathcal{B}(X) \to U$ と $\nu : \mathcal{B}(Y) \to W$ が与えられたとき，すべての $A \in \mathcal{B}(X)$ と $B \in \mathcal{B}(Y)$ に対して $\lambda(A \times B) = \langle\mu(A), \nu(B)\rangle$ が成り立つ $X \times Y$ 上の擬ラドン σ-測度 $\lambda : \mathcal{B}(X \times Y) \to V$ が存在することが示されている．この測度 λ は μ と ν の**Borel 直積**と呼ばれる．他の重要な結果を含むより詳細な内容については [15] を見よ．

この章では，定理 3.2 の応用として，上の結果を X や Y が必ずしも局所コンパクトとは限らない場合に拡張する．

まず，$\mathcal{C}$ は $X \times Y$ 上の可測長方形 $A \times B$ $(A \in \mathcal{B}(X), B \in \mathcal{B}(Y))$ 全体によって生成された集合体とする．有限加法的な $\mu : \mathcal{B}(X) \to U$ と $\nu : \mathcal{B}(Y) \to W$ が与えられると，可測長方形 $A \times B$ における値を $\lambda_0(A \times B) := \langle\mu(A), \nu(B)\rangle$ で定義することにより，μ と ν の直積 λ_0 が定義できる．任意の $C \in \mathcal{C}$ は $C = \cup_{i=1}^n (A_i \times B_i)$ $(n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{B}(X), B_i \in \mathcal{B}(Y)$ $(n = 1, 2, \ldots, n), \{A_i \times B_i\}_{i=1}^n$ は互いに素) と表せるので，集合関数 λ_0 は新たに $\lambda_0(C) := \sum_{i=1}^n \langle\mu(A_i), \nu(B_i)\rangle$ と置くことにより，$\mathcal{C}$ 上に拡張できる．この定義は C の表現の仕方によらないので well-defined で，再び $\mathcal{C}$ 上で有限加法的となる．

補題 4.2 ([8])**.** X と Y は完全正則空間とする．μ は X 上の緊密な U-値 σ-測度で，ν は Y 上の緊密な W-値 σ-測度とする．双正値双線形写像 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は完全に適正とする．このとき，$X \times Y$ 上の擬ラドン V-値 σ-測度 $\lambda : \mathcal{B}(X \times Y) \to V$ が存在して，任意の $f \in C(X)$ と $g \in C(Y)$ に対して

$$\int_{X\times Y} fg d\lambda = \left\langle \int_X f d\mu, \int_Y g d\nu \right\rangle$$

が成り立つ．

以上の準備の下で，完全正則空間上の σ-測度の Borel 直積測度の存在と一意性に関する定理を紹介することができる．

定理 4.3 ([8]). X と Y は完全正則空間とする．μ は X 上の擬ラドン U-値 σ-測度，ν は Y 上の擬ラドン W-値 σ-測度とする．双正値双線形写像 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は完全に適正とする．このとき，$X\times Y$ 上の擬ラドン V-値 σ-測度 $\lambda:\mathcal{B}(X\times Y)\to V$ が存在して，任意の $A\in\mathcal{B}(X)$ と $B\in\mathcal{B}(Y)$ に対して

$$\lambda(A\times B)=\langle\mu(A),\nu(B)\rangle$$

が成り立つ．さらに，任意の $f\in B(X)$ と $g\in B(Y)$ に対して

$$\int_{X\times Y} fgd\lambda=\left\langle\int_X fd\mu,\int_Y gd\nu\right\rangle$$

が成り立つ．

定義 4.4. 定理4.3で与えられる σ-測度 λ のことを μ と ν の**Borel直積**といい，$\mu\times\nu$ とかく．

参考文献

[1] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Positive operators*, Academic Press, Orlando, 1985.

[2] A. Boccuto and A. R. Sambucini, *The monotone integral with respect to Riesz space-valued capacities*, Rend. Mat. (Roma), Ser. VII **16** (1996), 255–278.

[3] J. Diestel and J. J. Uhl, Jr., *Vector measures*, Amer. Math. Soc. Surveys No. 15, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1977.

[4] N. Dinculeanu, *Vector integration and stochastic integration in Banach spaces*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000.

[5] E. E. Floyd, *Boolean algebras with pathological order topologies*, Pacific J. Math. **5** (1955), 687–689.

[6] J. Kawabe, *Joint continuity of injective tensor products of vector measures in Banach lattices*, J. Aust. Math. Soc. Ser. **74** (2003), 185–199.

[7] ———, *The portmanteau theorem for Dedekind complete Riesz space-valued measures*, Proc. Nonlinear analysis and convex analysis (Tokyo, 2003), 149-158, Yokohama Publishers, Yokohama, 2004.

[8] ———, *Borel products of Riesz space-valued measures on topological spaces*, Sci. Math. Jpn. **60** (2004), 563–576.

[9] ———, *Uniformity for weak order convergence of Riesz space-valued measures*, submitted for publication.

[10] I. Kluvánek and G. Knowles, *Vector measures and control systems*, North Holland, Amsterdam, 1975.

[11] W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen, *Riesz spaces* I, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[12] J. D. M. Wright, *Stone-algebra-valued measures and integrals*, Proc. London Math. Soc. **19** (1969), 107–122.

[13] ———, *Vector lattice measures on locally compact spaces*, Math. Z. **120** (1971), 193–203.

[14] ———, *Measures with values in a partially ordered vector space*, Proc. London Math. Soc. **25** (1972), 675–688.

[15] ———, *Products of positive vector measures*, Quart. J. Math. Oxford **24** (1973), 189–206.

[16] A. C. Zaanen, *Introduction to operator theory in Riesz spaces*, Springer, Berlin, 1997.

Department of Mathematics
Faculty of Engineering
Shinshu University
4-17-1 Wakasato, Nagano 380-8553, Japan
E-mail address: jkawabe@shinshu-u.ac.jp
E-mail address: yamono224@yahoo.co.jp